

# Curs 4- Management Logistic

- Activitati ale Lantului de Aprovizionare II: Transport si Depozitare – partea 2

Galatus Ramona

2019

---

# Transport – optimizare locatii si proiectare layout

- a) metode pentru obținerea unor soluții inițiale de bază;
- b) metode pentru verificarea și îmbunătățirea soluțiilor inițiale de bază;
- c) metode pentru obținerea unor soluții inițiale optime.

- ✘ Cel puțin 3 locuri de productie si cel puțin 3 locuri de consum
- ✘ Solutiile trebuie sa fie: exacte sau aproximative
- ✘ Presupun optimizare pe baza
  - + Distanțe de transport, consumul de timp
  - + Cheltuieli de transport

# Solutii initiale de baza

- × Metoda NV (SV)
- × Metoda elementului minim pe linie (sau pe coloana)
- × Metoda “Penalty”
- × Acoperirea zerourilor
- × Kotzig
- × Vogel
- × **BELLMAN-KALLABA**

# Metoda Nord-Vest

Distanțele și cantitățile de transportat

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	Disponibil
A <sub>1</sub>	7	4	4	324
A <sub>2</sub>	6	4	5	448
A <sub>3</sub>	5	5	6	534
A <sub>4</sub>	2	3	5	532
A <sub>5</sub>	6	3	4	468
A <sub>6</sub>	4	3	2	514
necesar	600	1100	1120	

$$F = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^3 C_{ij} X_{ij} = 324,7 + 276,6 + 172,4 + 534,5 + 394,3 + 138,5 + 468,4 + 514,2 = 12.054 \text{ t/km}$$

Repartiția cantităților de transport

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	Disponibil
A <sub>1</sub>	324	0	0	324
A <sub>2</sub>	276	172	0	448
A <sub>3</sub>	0	534	0	534
A <sub>4</sub>	0	394	138	532
A <sub>5</sub>	0	0	468	468
A <sub>6</sub>	0	0	514	514
necesar	600	1100	1120	2820

$$= 324 \cdot 7 + 276 \cdot 6 + 172 \cdot 4 + 534 \cdot 5 + 394 \cdot 3 + 138 \cdot 5 + 468 \cdot 4 + 514 \cdot 2$$

Solutia initiala se poate  
Optimiza (ex metoda  
Distributiva sau a  
Potentialelor – “Modi”)

# Metoda S-V

- ✘ Este echivalenta, doar se porneste de la coltul stanga jos (depinde cum se distribuie prioritatile)

**Repartiția cantităților de transportat**

$A_i$	$B_j$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	Disponibil
$A_1$	0	7	4	7	
$A_2$	0	6	4	5	
$A_3$	0	5	5	6	
$A_4$	0	2	3	5	
$A_5$	86	6	3	4	
$A_6$	514	4	3	2	
necesar		600	1100	1120	2820

$$F = 324,7 + 448,5 + 348,6 + 186,5 + 532,3 + 382,3 + 86,6 + 514,4 = 12.840$$

# Metoda elementului minim pe linie

Cantitățile și distanțele de transport

$B_j$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$a_i$
$A_1$	5,8	5,4	3,8	1,4	5,0	2,6	780
$A_2$	2,8	3,2	3,4	1,8	2,2	2,4	870
$A_3$	2,6	3,6	4,2	4,0	3,0	1,2	550
$b_j$	240	480	340	320	680	140	2200

Element minim A1/B4

Planul optim de transport stabilit prin metoda elementului minim pe linie

$B_j$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$a_i$
$A_1$	0	0	320	320	0	140	780
$A_2$	190	0	0	0	680	0	870
$A_3$	50	480	20	0	0	0	550
$b_j$	240	480	340	320	680	140	2200

$$F = 320 \cdot 3,8 + 320 \cdot 1,4 + 140 \cdot 2,6 + 190 \cdot 2,8 + 680 \cdot 2,2 + 50 \cdot 2,6 + 480 \cdot 3,6 + 20 \cdot 4,2 = 5998 \text{ t.km.}$$

# Elementul minim pe coloana

Cantitățile și distanțele de transport

$B_j$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$a_i$
$A_1$	5,8	5,4	3,8	1,4	5,0	2,6	780
$A_2$	2,8	3,2	3,4	1,8	2,2	2,4	870
$A_3$	2,6	3,6	4,2	4,0	3,0	1,2	550
$b_j$	240	480	340	320	680	140	2200

Planul optim de transport

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$a_i$
$A_1$	5,8 0	5,4 0	3,8 0	1,4 320	5,0 320	2,6 140	780
$A_2$	2,8 0	3,2 480	3,4 340	1,8 0	2,2 50	2,4 0	870
$A_3$	2,6 240	3,6 0	4,2 0	4,0 0	3,0 310	1,2 0	550
$b_j$	240	480	340	320	680	140	2200

$$F = 320 \cdot 1,4 + 320 \cdot 5 + 140 \cdot 2,6 + 480 \cdot 3,2 + 340 \cdot 3,4 + 50 \cdot 2,2 + 240 \cdot 2,6 + 310 \cdot 3,0 = 6768 \text{ t.km.}$$

# Metoda dublei preferinte – combinatie din metodele anterioare (ultimele doua)

Stabilirea distanțelor minime

$B_j$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$a_i$
$A_1$		5,4	3,8				780
$A_2$		3,2	3,4				870
$A_3$		3,6	4,2				550
$b_j$	480		340				2200

$$780 - 320 = 460 - 170 = 290$$

$$870 - 680 = 190$$

Planul optim de transport

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$a_i$
$A_1$	0	290	170	320	0	0	780
$A_2$	0	190	0	0	680	0	870
$A_3$	240	0	170	0	0	140	550
$b_j$	240	480	340	320	680	140	2200

Funcția de cost = 6.270 t.km



# Metoda “Penalty” (penalizarilor)

- ✘ Se completeaza cu diferentele pe linie si coloana a celor mai mici numere succesive
- ✘ Se alege “diferenta” (penalty) cea mai mare si se completeaza pe coloana sau linia respectiva costul cel mai mic
- ✘ Se alocă in respectiva celula min(necesarul maxim si disponibil) si se calculeaza diferentele corespunzatoare, ramase, pentru necesar sau disponibil max (necesarul maxim si disponibil) - min(necesarul maxim si disponibil)
- ✘ Se calculeaza costul aferent

A company has four warehouses and six stores. The four warehouses altogether have a surplus of 22 units of a given commodity, divided among them as follows:

Warehouse	Surplus
1	5
2	6
3	2
4	9

The six stores altogether need 22 units of the commodity. Individual requirements are:

Store	Requirements
1	4
2	4
3	6
4	2
5	4
6	2

Costs of shipping one unit of the commodity from warehouse  $i$  to store  $j$  are displayed in the following matrix:

		Store					
		1	2	3	4	5	6
Warehouse	1	9	12	9	6	9	10
	2	7	3	7	7	5	5
	3	6	5	9	11	3	11
	4	6	8	11	2	2	10

Find feasible (not necessarily optimal) solutions, and the cost associated with each:

- by the Northwest Corner Method and
- by the Penalty Method.

		Store						Available
		1	2	3	4	5	6	
Warehouse	1	9	12	9	6	9	10	5
	2	7	3	7	7	5	5	6
	3	6	5	9	11	3	11	2
	4	6	8	11	2	2	10	9
Required		4	4	6	2	4	2	

		Store				Available
		1	2	3	5	
Warehouse	1	9	12	9	<sup>0</sup> 9	5 (0)
	2	7	3	7	<sup>0</sup> 5	4 (2)
	3	6	5	9	<sup>0</sup> 3	2 (2)
	4	6	8	11	<sup>4</sup> 2	7 (4) ←
Required		4	4	6	4	
		(0)	(2)	(2)	(1)	

Completes column 5

		Store						Available
		1	2	3	4	5	6	
Warehouse	1	9	12	9	6	9	<sup>0</sup> 10	5 (3)
	2	7	3	7	7	5	<sup>2</sup> 5	6 (2)
	3	6	5	9	11	3	<sup>0</sup> 11	2 (2)
	4	6	8	11	2	2	<sup>0</sup> 10	9 (0)
Required		4	4	6	2	4	2	
		(0)	(2)	(2)	(4)	(1)	(5)	

Completes column 6

		Store					Available
		1	2	3	4	5	
Warehouse	1	9	12	9	<sup>0</sup> 6	9	5 (3)
	2	7	3	7	<sup>0</sup> 7	5	4 (2)
	3	6	5	9	<sup>0</sup> 11	3	2 (2)
	4	6	8	11	<sup>2</sup> 2	2	9 (0)
Required		4	4	6	2	4	
		(0)	(2)	(2)	(4)	(1)	

Completes column 4

In continuare se completeaza celulele

2,2

1,3

4,1

3,1

3,3

		1	2	3	4	5	6	Available
1				5				
2			4				2	6
3	1			1				2
4	3				2	4		9
Required		4	4	6	2	4	2	

# METODA KOTZIG

În rezolvarea problemei de transport, cu ajutorul acestei metode se pleacă tot de la un tabel inițial în care se înscriu distanțele și cantitățile de transportat. După aceea stabilim distanța medie a fiecărui loc de producție ( $A_i$ ) față de toate locurile de consum ( $B_j$ ). Calculele se fac totalizând distanța de la o parcelă la fiecare loc de consum și împărțim rezultatul la numărul locurilor de consum. Luând un exemplu ipotetic (transportul masei verzi de pe 6 parcele la 5 locuri de consum)

Calculul distanței medii

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	Producția (t)	
A <sub>1</sub>	4	15	27	23	14	480	16,6
A <sub>2</sub>	5	8	9	25	21	270	13,6
A <sub>3</sub>	14	21	34	31	4	320	20,8
A <sub>4</sub>	28	26	45	43	14	140	31,2
A <sub>5</sub>	11	17	22	41	6	290	19,4
A <sub>6</sub>	12	20	3	22	5	180	12,4
Consumul (t)	280	135	425	455	385	1680	
	12,3	17,8	23,3	30,8	10,6		

$$B_1 = 4 + 5 + 14 + 28 + 11 + 12 = 74; 74 : 6 = 12,3$$

$$B_2 = 15 + 8 + 21 + 26 + 17 + 20 = 107; 107 : 6 = 17,8$$

$$B_3 = 27 + 9 + 34 + 45 + 22 + 3 = 140; 140 : 6 = 23,3$$

$$B_4 = 23 + 25 + 31 + 43 + 41 + 22 = 185; 185 : 6 = 30,8$$

$$B_5 = 14 + 21 + 4 + 14 + 6 + 5 = 64; 64 : 6 = 10,6$$

$$A_1 = 4 + 15 + 27 + 23 + 14 = 83; 83 : 5 = 16,6$$

$$A_2 = 5 + 8 + 9 + 25 + 21 = 68; 68 : 5 = 13,6$$

$$A_3 = 14 + 21 + 34 + 31 + 4 = 104; 104 : 5 = 20,8$$

$$A_4 = 28 + 26 + 45 + 43 + 14 = 156; 156 : 5 = 31,2$$

$$A_5 = 11 + 17 + 22 + 41 + 6 = 97; 97 : 5 = 19,4$$

$$A_6 = 12 + 20 + 3 + 22 + 5 = 62; 62 : 5 = 12,4$$

Calcularea noilor distanțe

Pătrățelul din tabel	Media rândurilor	+ Media coloanelor	= Suma valorilor medii	Distanța reală	- Suma valorilor medii	= Valoarea nouă
A <sub>1</sub> /B <sub>1</sub>	16,6	+12,3	= 28,9	4	-28,9	= 24,9
A <sub>1</sub> /B <sub>2</sub>	16,6	+17,8	= 34,4	15	-34,4	= 19,4
A <sub>1</sub> /B <sub>3</sub>	16,6	+23,3	= 39,9	27	-39,9	= 12,9
A <sub>1</sub> /B <sub>4</sub>	16,6	+30,8	= 47,4	23	-47,4	= 24,4
A <sub>1</sub> /B <sub>5</sub>	16,6	+10,6	= 27,2	14	-27,2	= 13,2
A <sub>2</sub> /B <sub>1</sub>	13,6	+12,3	= 25,9	5	-25,9	= 20,9
A <sub>2</sub> /B <sub>2</sub>	13,6	+17,8	= 31,4	8	-31,4	= 23,4

Pătrățelul din tabel	Media rândurilor	+ Media coloanelor	= Suma valorilor medii	Distanța reală	- Suma valorilor medii	= Valoarea nouă
A <sub>2</sub> /B <sub>3</sub>	13,6	+23,3	= 36,9	9	-36,9	= 27,9
A <sub>2</sub> /B <sub>4</sub>	13,6	+30,8	= 44,4	25	-44,4	= 19,4
A <sub>2</sub> /B <sub>5</sub>	13,6	+10,6	= 24,2	21	-24,2	= 3,2
A <sub>3</sub> /B <sub>1</sub>	20,8	+12,3	= 33,1	14	-33,1	= 19,1
A <sub>3</sub> /B <sub>2</sub>	20,8	+17,8	= 38,6	21	-38,6	= 17,6
A <sub>3</sub> /B <sub>3</sub>	20,8	+23,3	= 44,1	34	-44,1	= 10,1
A <sub>3</sub> /B <sub>4</sub>	20,8	+30,8	= 51,6	31	-51,6	= 20,6
A <sub>3</sub> /B <sub>5</sub>	20,8	+10,6	= 31,4	4	-31,4	= 27,4
A <sub>4</sub> /B <sub>1</sub>	31,2	+12,3	= 43,5	28	-43,5	= 15,5
A <sub>4</sub> /B <sub>2</sub>	31,2	+17,8	= 49,0	26	-49,0	= 23,0
A <sub>4</sub> /B <sub>3</sub>	31,2	+23,3	= 54,5	45	-54,5	= 9,5
A <sub>4</sub> /B <sub>4</sub>	31,2	+30,8	= 62,0	43	-62,0	= 19,0
A <sub>4</sub> /B <sub>5</sub>	31,2	+10,6	= 41,8	14	-41,8	= 27,8
A <sub>5</sub> /B <sub>1</sub>	19,4	+12,3	= 31,7	11	-31,7	= 20,9
A <sub>5</sub> /B <sub>2</sub>	19,4	+17,8	= 37,2	17	-37,2	= 23,4
A <sub>5</sub> /B <sub>3</sub>	19,4	+23,3	= 42,7	22	-42,7	= 27,9
A <sub>5</sub> /B <sub>4</sub>	19,4	+30,8	= 50,2	41	-50,2	= 19,4
A <sub>5</sub> /B <sub>5</sub>	19,4	+10,6	= 30,0	6	-30,0	= 3,2
A <sub>6</sub> /B <sub>1</sub>	12,4	+12,3	= 24,7	12	-24,7	= 12,7
A <sub>6</sub> /B <sub>2</sub>	12,4	+17,8	= 30,2	20	-30,2	= 10,2
A <sub>6</sub> /B <sub>3</sub>	12,4	+23,3	= 35,7	3	-35,7	= 32,7
A <sub>6</sub> /B <sub>4</sub>	12,4	+30,8	= 43,2	22	-43,2	= 21,2
A <sub>6</sub> /B <sub>5</sub>	12,4	+10,6	= 23,0	5	-23,0	= 18,0

**Tabel ajutător pentru optimizarea transportului, după metoda Kotzig  
(noile evaluări ale distanțelor și ordinea de repartitie)**

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	24,9 ④	19,4 -	12,9 -	24,4 ⑤	13,2 -
A <sub>2</sub>	20,9 -	23,4 ⑥	17,9 -	19,4 ⑧	3,2 -
A <sub>3</sub>	19,1 -	17,6 -	10,1 -	20,6 ⑦	27,4 ③
A <sub>4</sub>	15,5 -	23 -	9,5 -	19 -	27,8 ②
A <sub>5</sub>	20,7 -	20,2 -	20,5 ⑧	9,2 ⑨	24 -
A <sub>6</sub>	12,7 -	10,2 -	32,7 ①	21,2 -	18 -

După întocmirea tabelului ajutător, se stabilește ordinea de ocupare a tabelului (repartizarea cantităților de produs de la fiecare parcelă pe locuri de consum). Pentru aceasta, căutăm în tabelul ajutător cel mai mare număr negativ ca valoare și notăm cu 1, fiind deci primul pătrățel ce va primi cantitatea de masă verde în funcție de producția parcelei și de necesarul pentru consum. Căutăm apoi cel mai mare număr care urmează și procedăm în același mod. Pătrățelele care rămân în rândul epuizat al unei coloane se notează cu zero, iar în tabelul ajutător cu o linie.

În exemplul nostru, cel mai mare număr este 32,7 în pătrățelul A<sub>6</sub>/B<sub>3</sub>. Acest pătrățel îl notăm în tabelul ajutător cu 1, iar în tabelul principal, tabelul ..., repartizăm cantitatea de 180 t. Fiind repartizată astfel toată cantitatea parcelei A<sub>6</sub>, restul pătrățelelor vor primi zero (tab. 21). Căutăm acum numărul următor ca mărime, care este în pătrățelul A<sub>4</sub>/B<sub>5</sub> din tabelul ajutător, iar în tabelul principal repartizăm cantitatea de masă verde posibilă (140 t).

**Optimizarea transportului de masă verde cu metoda aproximativă  
(după Kotzig)**

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	Producția (t)
A <sub>1</sub>	280	0	0	200	0	480
A <sub>2</sub>	0	135	0	135	0	270
A <sub>3</sub>	0	0	0	75	245	320
A <sub>4</sub>	0	0	0	0	140	140
A <sub>5</sub>	0	0	245	45	0	290
A <sub>6</sub>	0	0	180	0	0	180
Consumul (t)	280	135	425	455	385	1680

**Ordinea și modul de completare a tabelului la optimizarea transportului  
(după metoda Kotzig)**

Nr. crt.	Pătrățelul tabelului	Evaluarea distanței	Cantitatea de masă-verde	Rândul sau coloana ocupată
1.	A <sub>6</sub> /B <sub>3</sub>	32,7	180	Rândul A <sub>6</sub>
2.	A <sub>4</sub> /B <sub>5</sub>	27,8	140	Rândul A <sub>4</sub>
3.	A <sub>3</sub> /B <sub>5</sub>	27,4	245	Coloana B <sub>5</sub>
4.	A <sub>1</sub> /B <sub>1</sub>	24,9	280	Coloana B <sub>1</sub>
5.	A <sub>1</sub> /B <sub>4</sub>	24,4	200	Rândul A <sub>1</sub>
6.	A <sub>2</sub> /B <sub>2</sub>	23,4	135	Coloana B <sub>2</sub>
7.	A <sub>3</sub> /B <sub>4</sub>	20,6	75	Rândul A <sub>3</sub>
8.	A <sub>5</sub> /B <sub>3</sub>	20,7	245	Coloana B <sub>3</sub>
R	A <sub>5</sub> /B <sub>4</sub>	9,2	45	Rândul A <sub>5</sub>
R	A <sub>2</sub> /B <sub>4</sub>	19,4	135	Tabelul

**Cost calculat=2311 t.km**

## Exemplu de posibila schema de transport folosita de o companie logistica

Locul unde se transporta	Denumire	Outlet 1	Outlet 2	Outlet 3	Outlet 4	Outlet 5	Outlet 6	Outlet 7	Outlet 8	Outlet 9	Outlet 10	Outlet 11	Outlet 12	Existente tone	T. km
Locul de unde se transporta															
Denumire	Simbol	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12		
Warehouse 1	A1	400					600	700						1700	3800
Warehouse 2	A2	150						60						210	8130
Warehouse 3	A3	200					57			200			300	757	27710
Warehouse 4	A4	15						40		50		30		135	1300
Warehouse 5	A5	60					100					150		310	1340
Warehouse 6	A6		50	55	50	50			180					385	1105
Warehouse 7	A7		60	60	60	60								240	510
Warehouse 8	A8							10		55		25		90	1300
Warehouse 9	A9									50				50	600
Warehouse 10	A10										250			250	375
Warehouse 11	A11									200		400		600	1200
<b>Total tone</b>		<b>825</b>	<b>110</b>	<b>115</b>	<b>110</b>	<b>110</b>	<b>757</b>	<b>810</b>	<b>180</b>	<b>555</b>	<b>250</b>	<b>605</b>	<b>300</b>	<b>4727</b>	<b>41370</b>

# Metoda Vogel- Metoda diferențelor maxime

- ✘ determină de cele mai multe ori o soluție de bază cât mai apropiată de soluția optimă. Se aplică astfel:
  - + - se atașează la matricea inițială (m+n-1) linii și coloane ajutoare;
  - + - se face diferența dintre cele mai mici costuri de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană;
  - + - se alege diferența cea mai mare și se repartizează cantitatea de transport în căsuța cu cel mai mic cost de pe linia sau coloana respectivă, ținând seama de regula:

$$x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$$

- ✘ Dacă rezultă două sau mai multe diferențe maxime egale, se alege cea corespunzătoare costului de transport minim; dacă și acestea sunt egale, se alege cea care asigură repartizarea cantității maxime de transportat.



# Exemplu 1

Destinations Sources	New York	Atlanta	Los Angeles	Supplies	
Detroit	2.2	2.1	2.4	250	
Cleveland	1.8	1.9	2.1	300	
Indianapolis	3.0	3.2	3.6	200	
Demands	190	240	320	750	

Destinations Sources	New York	Atlanta	Los Angeles	Supplies	Row penalty
Detroit	2.2	2.1	2.4	250	0.3
Cleveland	1.8	1.9	2.1	300	0.2
Indianapolis	3.0	3.2	3.6	200	—
Demands	190	240	320	750	
Column penalty	—	0.2	0.3		

Destinations Sources	New York	Atlanta	Los Angeles	Supplies	Row penalty
Detroit	2.2	2.1	2.4	250	0.1
Cleveland	1.8	1.9	2.1	300	0.1
Indianapolis	3.0	3.2	3.6	200	0.2
Demands	190	240	320	750	
Column penalty	0.4	0.2	0.3		

Destinations Sources	New York	Atlanta	Los Angeles	Supplies	Row penalty
Detroit	2.2	2.1	2.4	250	0.3
Cleveland	1.8	1.9	2.1	300	—
Indianapolis	3.0	3.2	3.6	200	—
Demands	190	240	320	750	
Column penalty	—				

Fig. 4

Destinations Sources	New York	Atlanta	Los Angeles	Supplies	Row penalty
Detroit	2.2	2.1	2.4	250	0.3
Cleveland	1.8	1.9	2.1	300	0.2
Indianapolis	3.0	3.2	3.6	200	0.4
Demands	190	240	320	750	
Column penalty	—	0.2	0.3		

Destinations Sources	New York	Atlanta	Los Angeles	Supplies	
Detroit	2.2	2.1	2.4	250	
Cleveland	1.8	1.9	2.1	300	
Indianapolis	3.0	3.2	3.6	200	
Demands	190	240	320	750	

## Exemplul 2

Depot \ Unit	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	Stocks	Penalties
$A_1$	(2)	(3)	(5)	(1)	8	(1)
$A_2$	(7)	(3)	(4)	(6)	10	(1)
$A_3$	(4)	(1)	(7)	(2)	20	(1)
Requirement	6	8	9	15	38	
Penalties	(2)	(2)	(1)	(1)		

↑

Depot \ Unit	$B_2$	$B_3$		Stock	Penalties
$A_2$	(3)	(4)		10	(1)
$A_3$	(1)	(7)		7	(6)
Requirement	8	9			
Penalties	(2)	(3)			

Depot \ Unit	$B_2$	$B_3$	$B_4$	Stocks	Penalties
$A_1$	(3)	(5)	(1)	2	(2)
$A_2$	(3)	(4)	(6)	10	(1)
$A_3$	(1)	(7)	(2)	20	(1)
Requirement	8	9	15	32	
Penalties	(2)	(1)	(1)		

←

↑

Depot \ Unit	$B_2$	$B_3$	$B_4$	Stocks	Penalties
$A_2$	(3)	(4)	(6)	10	(1)
$A_3$	(1)	(7)	(2)	20	(1)
Requirement	8	9	13	30	
Penalties	(2)	(3)	(4)		

↑

Depot \ Unit	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	Stock
$A_1$	6(2)			2(1)	8
$A_2$		1(3)	9(4)		10
$A_3$		7(1)		13(2)	20
Requirement	6	8	9	15	38

From the above facts calculate the cost of transportation as

$$6 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 3 + 9 \times 4 + 7 \times 1 + 13 \times 2$$

$$= 12 + 2 + 3 + 36 + 7 + 26$$

$$= 86$$

i.e., Rs. 8600.

# ALGORITMUL BELLMAN-KALLABA

Presupune parcurgerea următoarelor etape:

I. Se atașează graficului o matrice pătratică cu elementele:

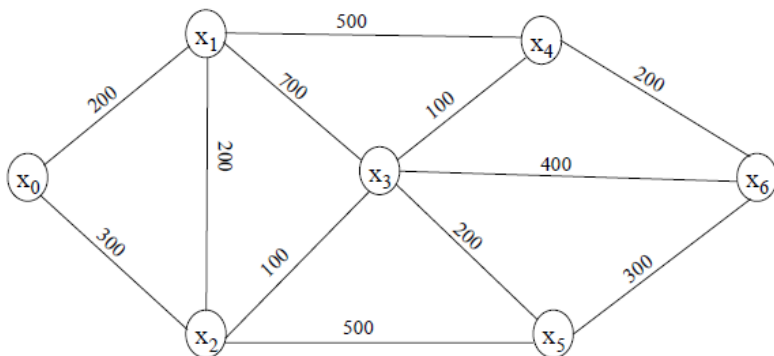
$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{daca } i = j \\ l(x_i; x_j), & \text{daca exista arcul } (x_i; x_j) \\ +\infty, & \text{daca nu exista arcul } (x_i; x_j) \text{ si problema se optimizeaza prin minim} \\ -\infty, & \text{daca nu exista arcul } (x_i; x_j) \text{ si problema se optimizeaza prin maxim} \end{cases}$$

II. Se face o primă iterație: vectorul ultimei coloane se transpune în vector linie. Cu ajutorul iterației „0” se însumează valorile de pe linie, reținându-se rezultatele minime (pentru problemele de minim) sau cele maxime (pentru problemele de maxim). Se continuă până când valorile a două iterații succesive sunt aceleași. Se poate citi valoarea drumului optim căutat, adică valoarea atașată vârfului de intrare în graf.

III. Pentru a determina vârfurile prin care trece drumul optim se caută diferite drumuri parțiale optime făcându-se diferența între drumurile parțiale optime ale vârfurilor adiacente și se alege acele vârfuri pentru care diferența este egală cu valoarea arcului

## Problema nr. 1:

Să se determine drumul de distanță totală minimă care leagă două puncte extreme:  $x_0$  – punct de expediție,  $x_6$  – punct de destinație. Posibilitățile de transport sunt redată în figura următoare (pe arce sunt înscrise distanțele exprimate în km):



	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_0$	0	200	300 *	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_1$	200	0	200	700	500	$\infty$	$\infty$
$x_2$	300	200	0	100 *	$\infty$	500	$\infty$
$x_3$	$\infty$	700	100	0	100 *	200	400
$x_4$	$\infty$	500	$\infty$	100	0	$\infty$	200 *
$x_5$	$\infty$	$\infty$	500	200	$\infty$	0	300
$x_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	400	200	300	0
$v_i^0$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	400	200	300	0
$v_i^1$	$\infty$	700	500	300	200	300	0
$v_i^2$	800	700	400	300	200	300	0
$v_i^3$	700	600	400	300	200	300	0
$v_i^4$	700	600	400	300	200	300	0

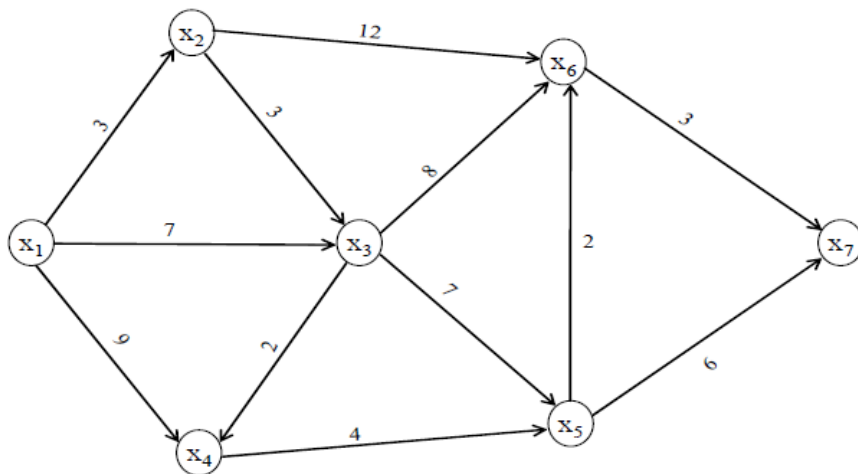
Distanța corespunzătoare drumului optim este: 700 km (celula  $v_i^4$  &  $x_1$ ).

Drumul optim (distanță totală minimă) este:

$x_0 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_6$ .

**Problema nr. 2:**

În figura următoare sunt prezentate legăturile dintre cele 7 noduri ale unei rețele, pe arce fiind înscrise duratele procesului de transport exprimate în ore. Să se obțină un drum de valoare totală minimă care leagă cele două puncte  $x_1$  și  $x_7$ .



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_1$	0	$3^*_0$	7	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_2$	$\infty$	0	$3^*_0$	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$
$x_3$	$\infty$	$\infty$	0	$2^*$	7	$8_0$	$\infty$
$x_4$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$4^*$	$\infty$	$\infty$
$x_5$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$2^*$	6
$x_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$3^*_0$
$x_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
$v_i^0$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	3	0
$v_i^1$	$\infty$	15	11	10	5	3	0
$v_i^2$	18	14	11	9	5	3	0
$v_i^3$	17	14	11	9	5	3	0
$v_i^4$	17	14	11	9	5	3	0

Durata drumului optim este: 17 ore (celula  $v_i^4$  &  $x_1$ ).

Există două drumuri optime:

$d_1: x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow x_7$

$d_2: x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_6 \rightarrow x_7$